

# Supplemento a: “Quante volte si può piegare un foglio?”

April 28, 2016

## Misure del foglio

Consideriamo un foglio A4 standard: la superficie è 297x210mm [1]; lo spessore è tipicamente circa 0.1mm [2].

Semplifichiamo un po' la notazione chiamando  $s$  lo spessore del foglio e usandolo come unità di lunghezza. Per i primi tentativi abbiamo ammesso che il foglio non possa mai diventare più sottile dello spessore iniziale, quindi  $s$  è comunque la lunghezza più piccola che dovremo affrontare. Con queste definizioni, il foglio è un parallelepipedo di misure  $(2970 \times 2100 \times 1)s$ .

Ora facciamo un'approssimazione che rende i conti molto più semplici: diciamo che il foglio ha le stesse proporzioni ma è largo  $2048s = 2^{11}s$  invece che  $2100s$ . Lo standard A4 dice che la lunghezza è (a meno di arrotondamenti)  $\sqrt{2}$  volte la larghezza [1]. Perciò il nostro foglio è grande, ad una prima approssimazione,  $(\sqrt{2} \cdot 2^{11} \times 2^{11} \times 1)s$ .

## Metodo 1: piega sul lato più lungo

Assumendo di poter fare pieghe assolutamente perfette, l'operazione di piega equivale a dividere per 2 il più lungo dei lati e moltiplicare per 2 il più corto. Per le pieghe dispari, il lato su cui si piega è la lunghezza, per quelle pari è la larghezza. Ovvero, per ogni  $k \geq 1$ , la piega numero  $2k - 1$  porta le dimensioni a  $(\sqrt{2} \cdot 2^{11-k} \times 2^{11-(k-1)} \times 2^{2k-1})s$ , la numero  $2k$  le porta a  $(\sqrt{2} \cdot 2^{11-k} \times 2^{11-k} \times 2^{2k})s$ .

Importantemente, questo processo è valido soltanto fintantoché lo spessore è la dimensione minima, ovvero finché  $2^{2k} < 2^{11-k}$ , ovvero finché  $k < \frac{11}{3} \sim 4$ . Dopo la settima piega (la numero  $2k - 1$  per  $k = 4$ ), infatti, le dimensioni del foglio sono  $(\sqrt{2} \cdot 2^7 \times 2^8 \times 2^7)s$ , piegando ancora lungo la larghezza si arriva a  $(\sqrt{2} \cdot 2^7 \times 2^7 \times 2^8)s$  e lo spessore è diventata la dimensione massima. Lo stesso effetto della piega, però, può essere ottenuto semplicemente ruotando il parallelepipedo così da scambiare “larghezza” e “spessore”. Quindi l'ottava piega è la stessa cosa di una rotazione del foglio.

## Metodo 2: piega su lunghezza e larghezza originali

La regola è la stessa fino alla piega numero 7. Poi, invece che piegare sul lato più lungo (lo spessore), si continua con la stessa regola, dimezzando la lunghezza.

Questo procedimento ha senso finché tutti i lati sono lunghi almeno  $s$ , ovvero fino alla piega 22 ( $k = 11$ ), quando le dimensioni diventano  $(\sqrt{2} \times 1 \times 2^{22})s$ .

## Bibliografia

- [1] <http://www.cl.cam.ac.uk/~mgk25/iso-paper.html>
- [2] <http://hypertextbook.com/facts/2001/JuliaSherlis.shtml>